

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x, y

Λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$

2.

Γραφική παράσταση γραμμικής εξίσωσης

Κάθε γραμμική εξίσωση $ax + by = \gamma$ παριστάνει ευθεία ε .

- Όταν $b \neq 0$ και $a \neq 0$, η εξίσωση γίνεται $by = -ax + \gamma \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b}$ και η ευθεία τέμνει τους άξονες
- Όταν $b = 0$, η εξίσωση γίνεται $ax = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{a}$ και η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.
- Όταν $a = 0$, η εξίσωση γίνεται $by = \gamma \Leftrightarrow y = \frac{\gamma}{b}$ και η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

3.

Λύση γραμμικής εξίσωσης

Λέγεται κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

4.

Σύστημα 2×2

Λέγεται κάθε σύστημα της μορφής
$$\begin{cases} ax+by=\gamma \\ \alpha'x+\beta'y=\gamma' \end{cases}$$

5.

Λύση συστήματος

Λέγεται κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

6.

Ισοδύναμα συστήματα

Λέγονται τα συστήματα που έχουν ίδιες λύσεις.

7.

Γραφική επίλυση συστήματος 2 x 2

Στο σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε τις ευθείες που παριστάνουν οι δύο εξισώσεις του συστήματος. Το σημείο τομής τους αποτελεί τη **γραφική λύση**.

8.

Ορίζουσα 2 x 2 (2 γραμμές επί 2 στήλες): $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$

9.

Οι ορίζουσες του συστήματος $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}$$

10.

Λύση – διερεύνηση του συστήματος $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right)$
- Αν $D = 0$, το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

ΣΧΟΛΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Πλήθος λύσεων

Κάθε γραμμική εξίσωση $ax + by = \gamma$, έχει άπειρες λύσεις

2.

Μέθοδος

Για να έχουμε όλες τις λύσεις γραμμικής εξίσωσης, λύνουμε ως προς τον έναν άγνωστο συναρτήσει του άλλου.

3.

Μέθοδος

Για να βρούμε μία λύση γραμμικής εξίσωσης, θέτουμε μία αυθαίρετη τιμή στον έναν άγνωστο και λύνουμε ως προς τον άλλο.

4.

Διευκρίνιση

Η εξίσωση της μορφής $ax = \beta$ με $a \neq 0$:

- Μπορεί να είναι η γνωστή πρωτοβάθμια εξίσωση με άγνωστο x .
- Μπορεί να είναι γραμμική εξίσωση αφού γράφεται $ax + 0 \cdot y = \beta$

5.

Η εξίσωση $y = \kappa$

Είναι γραμμική αφού γράφεται $0x + y = \kappa$.

Παριστάνει ευθεία $\parallel x'x$

Όλα της τα σημεία έχουν ίδια τεταγμένη κ .

Είναι συνάρτηση

6.

Η εξίσωση $x = \kappa$

Είναι γραμμική αφού γράφεται $x + 0y = \kappa$.

Παριστάνει ευθεία $\parallel y'y$

Όλα της τα σημεία έχουν ίδια τετμημένη κ .

Προσοχή Δεν είναι συνάρτηση

7.

Γραμμική εξίσωση και αντίστοιχη συνάρτησηΌταν $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση $ax + by = \gamma$ γράφεται

$$by = -ax + \gamma$$

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$$

$$f(x) = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$$

συνάρτηση της μορφής $f(x) = \lambda x + \mu$ **Προσοχή :** Όταν $\beta = 0$, δεν έχουμε συνάρτηση, αλλά έχουμε ευθεία // $y'y$

8.

Μέθοδος

Για να λύσουμε σύστημα που έχει παράμετρο :

α) Βρίσκουμε τις D , D_x , D_y β) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις : $D = 0$, $D \neq 0$

9.

ΜέθοδοςΓια να βρούμε την τιμή της παραμέτρου ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρες λύσεις, λύνουμε την εξίσωση $D = 0$

10.

Σημείωση

Κάθε σύστημα 2×2 μπορεί :	Να έχει μοναδική λύση	$\Leftrightarrow$	οι ευθείες τέμνονται
	Να είναι αδύνατο	$\Leftrightarrow$	οι ευθείες παράλληλες
	Να έχει άπειρες λύσεις	$\Leftrightarrow$	οι ευθείες συμπίπτουν

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η εξίσωση $2x + 3y = -1$.

i) Να εξετάσετε αν τα ζευγάρια $(1, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ είναι λύσεις της εξίσωσης.

ii) Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης, όπως και μια συγκεκριμένη.

iii) Κάθε λύση της εξίσωσης τι παριστάνει στο καρτεσιανό επίπεδο;

Προτεινόμενη λύση

i)

$2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 2 - 3 = -1$, δηλαδή το ζευγάρι $(1, -1)$ επαληθεύει την εξίσωση, άρα αποτελεί λύση της

$2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - 1 = 0 \neq -1$, δηλαδή το ζευγάρι $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ δεν επαληθεύει την εξίσωση, άρα δεν αποτελεί λύση της

ii)

Η εξίσωση $2x + 3y = -1 \Leftrightarrow 3y = -2x - 1$
 $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ **(1)**

Σχόλιο 2

Οι λύσεις είναι $(x, y) = \left(x, -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για $x = 0$, η (1) δίνει $y = -\frac{1}{3}$

Άρα μια συγκεκριμένη λύση είναι $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$

ii)

Κάθε λύση της εξίσωσης, στο καρτεσιανό επίπεδο, παριστάνει ένα σημείο.

2.

Δίνεται η εξίσωση $x + y = 6$.

Δικαιολογήστε κάθε απάντησή σας στα παρακάτω ερωτήματα.

i) Είναι συνάρτηση ;

Αν ναι, ποια η μονοτονία της ;

ii) Στο καρτεσιανό επίπεδο, παριστάνει ευθεία ;

Αν ναι, τι γωνία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$;

Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι συνάρτηση, διότι γράφεται $y = -x + 6$

$$f(x) = -x + 6 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

που είναι της μορφής $f(x) = ax + \beta$

Επειδή $a = -1 < 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii)

Στο καρτεσιανό επίπεδο παριστάνει ευθεία, αφού είναι γραμμική.

Έστω ω η γωνία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$

$$\text{Είναι } \epsilon\phi\omega = a \Rightarrow \epsilon\phi\omega = -1$$

$$\epsilon\phi\omega = -\epsilon\phi 45^\circ$$

$$\epsilon\phi\omega = \epsilon\phi(180^\circ - 45^\circ)$$

$$\epsilon\phi\omega = \epsilon\phi 135^\circ \Rightarrow \omega = 135^\circ$$

Σχόλιο 7

3.

Δίνεται η εξίσωση $y = 2$. Δικαιολογήστε κάθε απάντησή σας στα ερωτήματα :

Είναι συνάρτηση ;

Είναι γνησίως μονότονη ;

Ποιες είναι οι λύσεις της ;

Τέλος, σχεδιάστε τη γραμμή που σχηματίζουν οι λύσεις της.

Προτεινόμενη λύση

Είναι συνάρτηση,

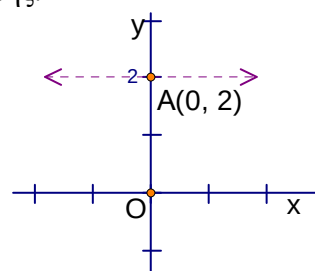
$$\text{αφού γράφεται } 0x + 1y = 2$$

$$f(x) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δεν είναι γνησίως μονότονη, αφού είναι σταθερή.

Οι λύσεις της είναι $(x, y) = (x, 2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο 7



4.

Δίνεται η εξίσωση $x = 2$. Δικαιολογήστε κάθε απάντησή σας στα ερωτήματα :

Είναι συνάρτηση ;

Ποιες είναι οι λύσεις της ;

Τέλος, σχεδιάστε τη γραμμή που σχηματίζουν οι λύσεις της.

Προτεινόμενη λύση

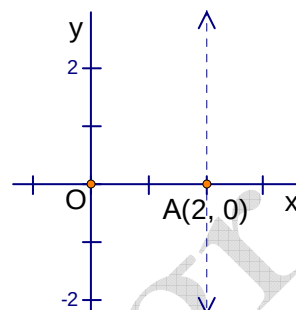
Η εξίσωση γράφεται

$1x + 0y = 2$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Δεν είναι συνάρτηση, αφού ένα x (το 2)

αντιστοιχίζεται σε πολλά (οποιοδήποτε) y .

Οι λύσεις της είναι $(x, y) = (2, y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.



5.

- i) Στο καρτεσιανό επίπεδο τοποθετήστε τέσσερα σημεία που να έχουν τετμημένη 2

Είναι συνευθειακά; Αν ναι, ποια είναι η εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκουν και τι γωνία σχηματίζει αυτή με τον άξονα $x'x$;

- ii) Στο καρτεσιανό επίπεδο τοποθετήστε τέσσερα σημεία που να έχουν τεταγμένη -1

Είναι συνευθειακά; Αν ναι, ποια είναι η εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκουν και τι γωνία σχηματίζει αυτή με τον άξονα $x'x$;

- iii) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των παραπάνω ευθειών;

Προτεινόμενη λύση

i)

Σχόλιο 6

Έστω A, B, Γ, Δ τα τέσσερα σημεία.

Είναι συνευθειακά και μάλιστα ανήκουν

σε ευθεία $\perp x'x$, από το σημείο $(2, 0)$

Η εξίσωση της ευθείας τους είναι $x = 2$

και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 90°

ii)

Έστω K, Λ, M, N τα τέσσερα σημεία.

Είναι συνευθειακά και μάλιστα ανήκουν

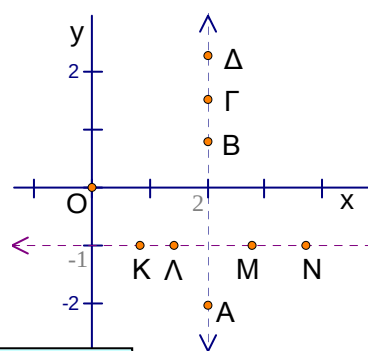
σε ευθεία $\parallel x'x$, από το σημείο $(0, -1)$

Η εξίσωση της ευθείας τους είναι $y = -1$

και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 0°

iii)

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των παραπάνω ευθειών είναι $(2, -1)$



Σχόλιο 5

6.

Δίνονται οι ευθείες $2x - y = 1$ και $x + 3y = 4$

Να βρείτε τη σχετική τους θέση (τέμνονται – παράλληλες – συμπίπτουν)

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 4 - 3y \end{cases} \quad \boxed{\text{Σχόλιο 10}}$$

$$\begin{cases} 2(4 - 3y) - y = 1 \\ x = 4 - 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 - 6y - y = 1 \\ x = 4 - 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7y = -7 \\ x = 4 - 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Άρα οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $A(1, 1)$

7.

Δίνονται οι ευθείες $2x - y = 1$ και $x - \frac{1}{2}y = 3$

Να βρείτε τη σχετική τους θέση (τέμνονται – παράλληλες – συμπίπτουν)

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \quad \boxed{\text{Σχόλιο 10}}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - (2x - 1) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 2x + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 1 = 6 \end{cases}$$

Σύστημα αδύνατο, άρα οι ευθείες είναι παράλληλες.

8.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2x - y = 1$ και $x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$

Να βρείτε τη σχετική τους θέση (τέμνονται – παράλληλες – συμπίπτουν)

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - y = 1$$

Σχόλιο 10

Άπειρες λύσεις, άρα οι ευθείες συμπίπτουν.

9.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2|x| + 3|y| = 11 \\ 3|x| - 5|y| = 7 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

Θέτουμε $|x| = \omega$ και $|y| = \varphi$

$$\begin{aligned} \text{Το σύστημα} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\omega + 3\varphi = 11 \\ 3\omega - 5\varphi = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = \frac{11-3\varphi}{2} \\ 3\omega - 5\varphi = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega = \frac{11-3\varphi}{2} \\ 3\frac{11-3\varphi}{2} - 5\varphi = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega = \frac{11-3\varphi}{2} \\ 33 - 9\varphi - 10\varphi = 14 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega = \frac{11-3\varphi}{2} \\ -19\varphi = -19 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega = \frac{11-3\varphi}{2} \\ \varphi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 4 \\ \varphi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 4 \\ |y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ y = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Οι λύσεις είναι $(4, 1)$, $(4, -1)$, $(-4, 1)$, $(-4, -1)$

10.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=11 \\ 3\sqrt{x}-5\sqrt{y}=7 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμοί : $x, y \geq 0$

Θέτουμε $\sqrt{x} = \omega, \sqrt{y} = \varphi$

Το σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} 2\omega+3\varphi=11 \\ 3\omega-5\varphi=7 \end{cases}$$
 λύνοντας, όπως στην άσκηση 9, βρίσκουμε

$$\begin{cases} \omega = 4 \\ \varphi = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 4 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 16 \\ y = 1 \end{cases}$$

11.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 7 \end{cases}$$

Λύση

Το σύστημα γράφεται
$$\begin{cases} 3\frac{1}{x} - 4\frac{1}{y} = 9 \\ 4\frac{1}{x} - 5\frac{1}{y} = 7 \end{cases}$$
 Θέτουμε $\frac{1}{x} = u$ και $\frac{1}{y} = v$.

Το σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} 3u - 4v = 9 \\ 4u - 5v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u = 9 + 4v \\ 4u - 5v = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{9+4v}{3} \\ 4u - 5v = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{9+4v}{3} \\ 4\frac{9+4v}{3} - 5v = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{9+4v}{3} \\ 36 + 16v - 15v = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{9+4v}{3} \\ v = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{9+4(-15)}{3} \\ v = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{9-60}{3} \\ v = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -17 \\ v = -15 \end{cases}$$

Άρα $x = -\frac{1}{17}$ και $y = -\frac{1}{15}$

12.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{3}{x-2} + \frac{5}{y+3} = 1 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{1}{y+3} = 5 \end{cases}$$

ΛύσηΠεριορισμός: $x \neq 2, y \neq -3$

Θέτουμε $\frac{1}{x-2} = \kappa, \quad \frac{1}{y+3} = \lambda$

Το σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} 3\kappa + 5\lambda = 1 \\ 2\kappa - \lambda = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\kappa + 5\lambda = 1 \\ 2\kappa - 5 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\kappa + 5(2\kappa - 5) = 1 \\ \lambda = 2\kappa - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\kappa + 10\kappa - 25 = 1 \\ \lambda = 2\kappa - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13\kappa = 26 \\ \lambda = 2\kappa - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa = 2 \\ \lambda = 2\kappa - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Άρα $\frac{1}{x-2} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2x - 4 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

και $\frac{1}{y+3} = -1 \Leftrightarrow 1 = -y - 3 \Leftrightarrow y = -4$

13.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x+y = 3 \\ |x-y| = 1 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{cases} x+y = 3 \\ |x-y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \text{ ή } x-y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = -1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (+) & 2x = 4 \\ (-) & 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (+) & 2x = 2 \\ (-) & 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

14.

Ένα αεροπλάνο ταξιδεύοντας με αντίθετο άνεμο διάνυσε την απόσταση μεταξύ δύο πόλεων που ήταν 4048 km σε 4,6 ώρες, ενώ για την επιστροφή χρειάστηκε 4,4 ώρες. Να βρείτε την ταχύτητα του αεροπλάνου και του ανέμου, υποθέτοντας ότι και οι δύο ήταν σταθερές.

Προτεινόμενη λύση

Έστω v_1 η ταχύτητα του αεροπλάνου και v_2 η ταχύτητα του ανέμου.

- Με αντίθετο άνεμο, το αεροπλάνο ταξίδευε με ταχύτητα $v_1 - v_2$, οπότε $(v_1 - v_2) \cdot 4,6 = 4048$ **(1)**
- Στην επιστροφή, το αεροπλάνο ταξίδευε με ταχύτητα $v_1 + v_2$, οπότε $(v_1 + v_2) \cdot 4,4 = 4048$ **(2)**

$$\text{Σύστημα των (1), (2)} \quad \begin{cases} (v_1 - v_2) \cdot 4,6 = 4048 \\ (v_1 + v_2) \cdot 4,4 = 4048 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_2 = 880 \\ v_1 + v_2 = 920 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (+) : 2v_1 = 1800 \\ (-) : 2v_2 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 900 \\ v_2 = 20 \end{cases}$$

15.

Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 48 cm. Αν αυξήσουμε συγχρόνως τη μια πλευρά κατά 5 cm και την άλλη κατά 1 cm, τότε το εμβαδόν του αυξάνει κατά 65 cm^2 . Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

Προτεινόμενη λύση

Έστω x, y οι αρχικές πλευρές του ορθογωνίου.

Τότε $2x + 2y = 48$ **(1)** και xy το εμβαδόν.

Στη συνέχεια οι πλευρές γίνονται $x + 5, y + 1$ και το εμβαδόν $xy + 65$.

$$\text{Άρα } (x + 5)(y + 1) = xy + 65 \Leftrightarrow$$

$$xy + x + 5y + 5 = xy + 65 \Leftrightarrow$$

$$x + 5y = 60 \quad \textbf{(2)}$$

$$\text{Σύστημα των (1), (2)} \quad \begin{cases} x + y = 24 \\ x + 5y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 24 \\ (-) : 4y = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 9 = 24 \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 9 \end{cases}$$

16.

Να βρεθεί η τιμή του α ώστε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + 2y = \alpha^2 \\ 2x + \alpha y = 4 \end{cases}$ να έχει άπειρες λύσεις.

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Πρέπει } D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha^2 - 4 = 0$$

$$\alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2 \quad \text{ή} \quad \alpha = -2$$

Σχόλιο 9

- Για $\alpha = 2$

$$\text{Το σύστημα γίνεται } \begin{cases} 2x + 2y = 2^2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow x = 2 - y$$

Έχει άπειρες λύσεις, τις $(x, y) = (2 - y, y)$ με $y \in \mathbb{R}$

- Για $\alpha = -2$

$$\text{Το σύστημα γίνεται } \begin{cases} -2x + 2y = 2^2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 + x \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 + x \\ x - (2 + x) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 + x \\ x - 2 - x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 + x \\ -2 = 2 \end{cases} \quad \text{αδύνατο}$$

Άρα η ζητούμενη τιμή είναι $\alpha = 2$

17.

Να βρεθεί η τιμή του α ώστε το σύστημα
$$\begin{cases} 2\alpha x + \alpha y = 4 \\ \alpha x + (\alpha - 1)y = 2 \end{cases}$$

να έχει μοναδική λύση (λ, μ) , γνωρίζοντας ότι το σημείο

$P(\lambda, \mu)$ ανήκει στην ευθεία $4x - 3y = \alpha + 2$.

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Πρέπει } D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha - 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$2\alpha^2 - 2\alpha - \alpha^2 \neq 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha \neq 0$$

$$\alpha(\alpha - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \alpha \neq 2 \quad (1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & \alpha \\ 2 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = 4\alpha - 4 - 2\alpha = 2\alpha - 4 = 2(\alpha - 2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2\alpha & 4 \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} = 4\alpha - 4\alpha = 0$$

$$\text{Άρα } (\lambda, \mu) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{2(\alpha - 2)}{\alpha(\alpha - 2)}, \frac{0}{\alpha(\alpha - 2)} \right) = \left(\frac{2}{\alpha}, 0 \right)$$

$$P(\lambda, \mu) \text{ ανήκει στην ευθεία } 4x - 3y = \alpha + 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{2}{\alpha} - 3 \cdot 0 = \alpha + 2$$

$$8 = \alpha^2 + 2\alpha$$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36, \quad \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = -1 \pm 3 = 2 \text{ ή } -4 \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1), (2)} \Rightarrow \alpha = -4$$